Von dem

Werthe der Erwartung,

welcher

mit dem Eintreffen eines künftigen, günstigen oder ungünstigen Ereignisses verbunden ist.

Eine Abhandlung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

L. Oettinger.

Von dem

Werthe der Erwartung, welcher mit dem Eintreffen eines künftigen, günstigen oder ungünstigen, Ereignisses verbunden ist.

---

§. 1.

Zwei Personen A und B unternehmen, irgend ein Ereigniss, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$, und dessen Nichteintreffen durch $\frac{m-a}{m} = \frac{b}{m}$ bestimmt ist, herbei zu führen. A beginnt, B folgt; diese Reihenfolge bleibt unverändert. So oft eine Person an die Reihe kommt, darf sie nur einen Versuch machen. Welches ist für A und B der Werth der Erwartung, das Eintreffen des fraglichen Ereignisses in p Versuchen herbeizuführen.

Die Erwartung von A beruht darauf, dass das gewünschte Ereigniss entweder im ersten, oder dritten, oder fünften u. s. w. also in den Versuchen, welche durch die Reihe der ungeraden Zahlen

angegeben sind, eintreffen werde; die von B, dass es in den Versuchen, welche durch die Reihe der geraden Zahlen angegeben sind, eintreffen werde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das fragliche Ereigniss im ersten Versuche eintreffen werde, ist $\frac{a}{m}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es im zweiten Versuche eintreffen werde, hängt davon ab, dass es im ersten nicht eingetroffen ist, und dass dieses Nichteintreffen sich sodann mit dem Eintreffen verbinde. Sie ist hiernach $\frac{b}{m} \cdot \frac{a}{m}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es im dritten Versuche eintreffen werde, hängt davon ab, dass es in den beiden ersten nicht, dagegen unter dieser Bedingung im dritten eintreffen werde. Sie ist

$$\frac{b}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{a}{m}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das fragliche Ereigniss im p^{ten} Versuche eintreffen werde, hängt davon ab, dass es in den $(p - 1)$ vorhergehenden Versuchen nicht, und dagegen unter dieser Bedingung im p^{ten} eintreffen werde. Sie ist also $\frac{b^{p-1}}{m^{p-1}} \cdot \frac{a}{m}$ Hiernach ist also die Erwartung für A

$$W = \frac{a}{m} + \frac{a\,b^2}{m^3} + \frac{a\,b^4}{m^5} + \frac{a\,b^6}{m^7} + \cdots + \frac{a\,b^{p-2}}{m^{p-1}}$$

und die für B

$$W = \frac{a\,b}{m^2} + \frac{a\,b^3}{m^4} + \frac{a\,b^5}{m^6} + \cdots + \frac{a\,b^{p-1}}{m^p}$$

oder, wenn die Reihen summirt werden. Für A

1. $W_1 = \frac{a\,m}{m^2 - b^2} \cdot \frac{m^p - b^p}{m^p}$, und für B

2. $W_2 = \frac{a\,b}{m^2 - b^2} \cdot \frac{m^p - b^p}{m^p}$

Diess gilt unter der Bedingung, dass p eine gerade Zahl ist, oder dass jede Person gleich viele Versuche anstellen kann. Ist p aber eine ungerade Zahl, so darf A einen Versuch mehr anstellen, und dann ist seine Erwartung

$$3.\quad W_1 = \frac{a\,m}{m^2 - b^2} \cdot \frac{m^{p+2} - b^{p+2}}{m^{p+2}}$$

während die von B unverändert wie in Nr. 2 bleibt. Wird die Zahl der Versuche p unendlich gross, oder sehr lange fortgesetzt, so wird der Werth der Erwartung von A aus Nr. 1.

$$4.\quad W_1 = \frac{a\,m}{m^2 - b^2}$$ und der für B aus Nr. 2.

$$5.\quad W_2 = \frac{a\,b}{m^2 - b^2}$$

Vergleichen wir die Werthe der Erwartungen von A und B mit einander, so erhalten wir folgendes beständige Verhältniss

$$W_1 : W_2 = m : b$$

und es zeigt sich, dass sich die Erwartung des A zu der des B verhält, wie die Einheit zur Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens. Merkwürdig ist hiebei, dass die Zahl der Versuche bei der Bestimmung des vorstehenden Verhältnisses gar keinen Einfluss übt, und dass es also hinsichtlich der Erwartung gleichgültig ist, ob nur einige, oder mehrere, oder gar unendlich viele Versuche angestellt werden. Zu gleicher Zeit erkennt man hieraus den Vortheil, welchen die Reihenfolge bei dem Eintreffen eines günstigen, und den Nachtheil, welchen sie bei einem ungünstigen herbeigeführt, und man sieht, wie die erste Hand bei dem Spiele oder Loosen von Vortheil oder Nachtheil seyn kann, wenn zwei Personen unter gleichen Wahrscheinlichkeiten ein und dasselbe Ereigniss herbei zu führen bemüht sind. Ebenso rechtfertigt sich hieraus die Behauptung, dass der Werth der Erwartung des A sich um so höher steigert, je grösser die Wahr-

scheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ist und umgekehrt der des B, je grösser die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens wird.

Alle diese Bemerkungen gelten nur für den Fall, wenn die Zahl der angestellten Versuche gerade, oder unendlich gross ist. Ist sie ungerade, so steigert sich der Werth der Erwartung von A, und das Verhältniss ist

$$W_1 : W_2 = m\left(1 - \left(\frac{b}{m}\right)^{p+2}\right) : b\left(1 - \left(\frac{b}{m}\right)^{p}\right)$$

und diess um so mehr, je kleiner die Zahl der Versuche ist.

Werfen z. B. A und B mit einem Würfel unter der Bedingung, dass derjenige gewinnt, welcher zuerst die Zahl 6 geworfen hat, so ist das Verhältniss ihrer Erwartungen, wenn beide eine gleiche Zahl von Würfen machen, wie 6 : 5; macht aber A zwei und B nur einen Wurf, wie 61 : 30.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das fragliche Ereigniss in p Versuchen wirklich eingetroffen ist, bestimmt sich durch

$$6.\quad W = \frac{a}{m} + \frac{a\,.\,b}{m^2} + \frac{a\,b^2}{m^4} + \ldots\ldots + \frac{a\,.\,b^{p-1}}{m^p} = \frac{a}{m-b}\cdot\frac{m^p - b^p}{m^p}$$

diejenige, dass es nicht eingetroffen ist, bestimmt sich durch

$$7.\quad W = \left(\frac{b}{m}\right)^p.$$

Ist p unendlich gross, so wird aus 6,

$$W = \frac{a}{m-b} = 1 \text{ und aus } W = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss eintreffen werde, steigert sich also, bei hinlänglich fortgesetzter Anzahl von Versuchen bis zur Gewissheit, während die des Gegentheils immer kleiner wird und endlich verschwindet. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 mit einem Wurfe in 10 Würfen geworfen worden sey, $\frac{50700551}{60466176}$ also beinahe $\frac{5}{6}$.

Nun kann man auch die Frage beantworten: Wie viele Versuche muss Jemand machen, um mit irgend einem Grade der Wahrscheinlichkeit $W = \frac{r}{s}$ wetten zu können, dass er ein Ereigniss, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ bedingt ist, herbei führen werde.

Die Frage beantwortet sich aus der Gleichung 6

$$\frac{r}{s} = \frac{m^p - b^p}{m^p}$$

dadurch, dass man p bestimmt. Hiernach ist:

$$8. \quad p = \frac{\lg s - \lg (s - r)}{\lg m - \lg (m - a)}$$

wenn $b = m - a$ bedeutet. Will z. B. Jemand 1 gegen 1 wetten, dass er die Zahl 6 mit einem Würfel werfen werde, so muss er sich vier Würfe aushalten, wobei ein kleiner Vortheil auf seiner Seite wäre; wollte er aber 5 gegen 1 wetten, so müsste er sich 10 Würfe ausbedingen, wobei ein kleiner Nachtheil auf seiner Seite wäre.

§. 2.

Unternehmen zwei Personen unter den nämlichen Bedingungen wie §. 1 ein Ereigniss herbeizuführen, jedoch so, dass A beginnt und B folgt, dann B fortfährt und A folgt u. s. f. in abwechselnder Reihenfolge, und fragt man nach den Erwartungen beider; so bemerkt man, dass A den ersten, vierten und fünften, siebenten und achten u. s. w., B die zwischenliegenden Versuche machen darf, und man hat zu unterscheiden, ob A oder B den letzten Versuch machen darf. Macht A den letzten Versuch, so bestimmt folgende Doppelreihe den Werth seiner Erwartung:

$$W_1 = \frac{a}{m} + \frac{a b^4}{m^5} + \frac{a b^8}{m^9} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-4}}{m^{p-3}}$$
$$+ \frac{a b^3}{m^4} + \frac{a b^7}{m^8} + \frac{a b^{11}}{m^{12}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-1}}{m^p}$$

die nachstehende aber den Werth der Erwartung von B

$$W_2 = \frac{a b}{m^2} + \frac{a b^5}{m^6} + \frac{a b^9}{m^{10}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-3}}{m^{p-2}}$$
$$+ \frac{a b^2}{m^3} + \frac{a b^6}{m^7} + \frac{a b^{10}}{m^{11}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-2}}{m^{p-1}}$$

Macht aber B den letzten Versuch, so ist der Werth der Erwartung von A

$$W_1 = \frac{a}{m} + \frac{a b^4}{m^5} + \frac{a b^8}{m^9} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-2}}{m^{p-1}}$$
$$+ \frac{a b^3}{m^4} + \frac{a b^7}{m^8} + \frac{a b^{11}}{m^{12}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-3}}{m^{p-2}}$$

der Werth der Erwartung von B

$$W_2 = \frac{a b}{m^2} + \frac{a b^5}{m^6} + \frac{a b^9}{m^{10}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-1}}{m^p}$$
$$+ \frac{a b^2}{m^3} + \frac{a b^6}{m^7} + \frac{a b^{10}}{m^{11}} + \ldots\ldots + \frac{a b^{p-4}}{m^{p-3}}$$

und hieraus gewinnt man für die vorstehenden Reihen folgende Summenausdrücke und zwar im ersten Falle die Erwartung für A:

$$9.\quad W_1 = \left(\frac{a}{m} + \frac{a b^3}{m^4}\right) \frac{m^p - b^p}{(m^4 - b^4)\, m^{p-4}}$$

die Erwartung von B

$$10.\quad W_2 = \left(\frac{a b}{m^2} + \frac{a b^2}{m^3}\right) \frac{m^p - b^p}{(m^4 - b^4)\, m^{p-4}}$$

Im zweiten Falle

$$11.\quad W_1 = \left[\frac{a}{m} \cdot \frac{m^{p+2} - b^{p+2}}{m^{p+2}} + \frac{a b^3}{m^4} \cdot \frac{m^{p-2} - b^{p-2}}{m^{p-2}}\right] \frac{m^4}{m^4 - b^4}$$

$$12.\quad W_2 = \left[\frac{a b}{m^2} \cdot \frac{m^{p+2} - b^{p+2}}{m^{p+2}} + \frac{a b^2}{m^3} \cdot \frac{m^{p-2} - b^{p-2}}{m^{p-2}}\right] \frac{m^4}{m^4 - b^4}$$

Die Werthe des zweiten Falles sind ziemlich zusammengesetzt. Im ersten Falle findet man auch hier ein einfacheres und beständiges Verhältniss. Es mag die Zahl der Versuche gross oder klein seyn, so ist das Verhältniss der Erwartungen von A und B

$$W_1 : W_2 = m^3 + b^3 : (m + b)\, m b$$

§. 3.

Unter den nämlichen Bedingungen wie bisher unternimmt A das fragliche Ereigniss in den ersten r Versuchen, B in den darauf folgenden s Versuchen herbeizuführen. Die nämliche Reihenfolge für A und B wird beibehalten. Beide setzen p mal ihre Versuche fort. Es fragt sich, welches ist die Erwartung für A, welche für B?

Die Wahrscheinlichkeit, dass A in den ersten r Versuchen seinen Zweck erreiche, ist:

$$W_1,\ 1 = \frac{a}{m} + \frac{a\,b}{m^2} + \frac{a\,b^2}{m^3} + \ldots\ldots + \frac{a\,b^{r-1}}{m^{r-1}} = \frac{m^r - b^r}{m^r}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass B in den darauf folgenden s Versuchen seinen Wunsch erreiche, setzt voraus, dass A den seinigen nicht erreicht habe, sie wird seyn:

$$W_2,\ 1 = \frac{a\,b^r}{m^{r+1}} + \frac{a\,b^{r+1}}{m^{r+2}} + \frac{a\,b^{r+2}}{m^{r+3}} + \ldots\ldots + \frac{a\,b^{r+s-1}}{m^{r+s}} = \frac{b^r}{m^r} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die zweite Reihe der Versuche beruht darauf, dass das gewünschte Ereigniss in der ersten nicht eingetroffen sey. Hiernach ist also für A und B

$$W_1,\ 2 = \frac{b^{r+s}}{m^{r+s}} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r}$$

$$W_2,\ 2 = \frac{b^{2r+s}}{m^{2r+s}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s}$$

Eben so für die dritte Reihe der Versuche

$$W_{1}, 3 = \frac{b^{2r+2s}}{m^{2r+2s}} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r}$$

$$W_{2}, 3 = \frac{b^{3r+2s}}{m^{3r+2s}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s}$$

u. s. f. Für die p^{te} Versuchsreihe

$$W_{1}, p = \frac{b^{(p-1)r+(p-1)s}}{m^{(p-1)r+(p-1)s}} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r}$$

$$W_{2}, p = \frac{b^{pr+(p-1)s}}{m^{pr+(p-1)s}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s}$$

Hiernach ist die Erwartung für A, die aus der Vereinigung aller Partialausdrücke besteht:

$$13. \quad W_1 = m^s \cdot \frac{m^r - b^r}{m^{r+s} - b^{r+s}} \cdot \frac{m^{p(r+s)} - b^{p(r+s)}}{m^{p(r+s)}}$$

$$14. \quad W_2 = b^r \cdot \frac{m^s - b^s}{m^{r+s} - b^{r+s}} \cdot \frac{m^{p(r+s)} - b^{p(r+s)}}{m^{p(r+s)}}.$$

Wird die Zahl der Versuche bis ins Unendliche fortgesetzt, so erhalten wir, da $p = \infty$ wird

$$15. \quad W_1 = m^s \cdot \frac{m^r - b^r}{m^{r+s} - b^{r+s}} \quad \text{und} \quad W_2 = b^r \cdot \frac{m^s - b^s}{m^{r+s} - b^{r+s}}$$

Vergleichen wir die Erwartungen beider, so entsteht

$$W_1 : W_2 = m^s(m^r - b^r) : b^r(m^s - b^s)$$

woraus wir erkennen, dass auch hier ein beständiges Verhältniss herrscht, die Zahl der Wiederholungen mag gross oder klein seyn. Nur die Zahl der Versuche, welche Jedem bei dem Zutritte zum Spiele zugestanden ist, hat hierauf Einfluss.

Spielen z. B. A und B mit einem Würfel unter der Bedingung, dass jeder zwei Würfe hintereinander machen darf, und dass derjenige gewonnen hat, welcher zuerst die Zahl 6 geworfen hat, so ist das Verhältniss ihrer Erwartungen, wie 2376 : 2275, sie mögen einmal werfen, oder das Spiel beliebig lang fortsetzen.

Hieran schliesst sich die Frage: A unternimmt, in r hintereinander folgenden Versuchen ein Ereigniss herbeizuführen. B will dasselbe thun, jedoch unter der Bedingung, dass er die gleiche Erwartung wie A habe, seinen Wunsch zu erreichen. Wie viel Versuche müssen B zugestanden werden?

Da $W_1 = W_2$ seyn soll, so muss auch $m^s(m^r - b^r) = b^r(m^s - b^s)$ werden. Setzt man nun hierin $b = m - a$, und bestimmt s, so hat man

$$16.\quad s = \frac{\lg[2(m-a)^r - m^r] - r\lg(m-a)}{\lg(m-a) - \lg m}$$

Will A und B die Zahl 6 mit einem Würfel werfen, und sind dem A zwei Würfe zugestanden, so müssen dem zweiten wenigstens drei zugestanden werden, um eine gleiche Erwartung zu haben, wobei jedoch ein kleiner Nachtheil auf seiner Seite ist. Wären dem A 3 Würfe zugestanden, so müsste man dem zweiten Theilnehmer 8 Würfe zugestehen.

Zugleich erkennt man, dass man, unter den vorliegenden Bedingungen, dem ersten Spieler nicht jede Zahl von Versuchen zugestehen kann. Denn soll der Werth seiner Erwartung der des zweiten gleichkommen, so darf dieser Werth nicht höher als $\frac{1}{2}$ steigen, denn die Summe beider Erwartungen ist der Einheit (der Gewissheit) gleich. Die Zahl der Versuche, welche daher dem ersten Theilnehnehmer höchstens zugestanden werden darf, bestimmt sich aus Nr. 8, wenn dort $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$ und $p = r$ gesetzt wird. Hiernach ist

$$17.\quad r = \frac{\lg 2}{\lg m - \lg(m-a)}$$

Die Zahl der Versuche wird um so grösser, je kleiner die Wahrscheinlichkeit ist, dass das gewünschte Ereigniss im einzelnen Ver-

suche eintreffen werde. Werfen z. B. A und B mit einem Würfel, um die Zahl 6 zu werfen, so dürfen dem ersten höchstens 4 Würfe, wobei er sogar in einem kleinen Vortheil ist, zugestanden werden, während dem zweiten alle folgenden zugewiesen werden müssen.

Nun lässt sich auch die Frage beantworten: Wie gross muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses seyn, um bei einer gegebenen Anzahl von Versuchen in gleiche Bedingungen mit einem Theilnehmer eintreten zu können?

Da die Erwartung beider Theilnehmer vor Anfang der Versuche einander gleich seyn soll, so ist nur nöthig, die Grösse der Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ für das Eintreffen des Ereignisses im einzelnen Versuche zu bestimmen. Ist die Zahl der Versuche, die dem A zugestanden sind r, und die aus r anzustellenden Versuchen resultirende Erwartung $\frac{k}{s}$, so hat man aus der Gleichung $\frac{k}{s} = \frac{m^r - (m-a)^r}{m^r}$ den Werth $\frac{a}{m}$ zu bestimmen. Ihre Entwicklung führt zu der Gleichung

$$18. \quad \frac{a}{m} = 1 - \sqrt[r]{\frac{s-k}{s}}$$

oder zu der logarithmischen

$$19. \quad \frac{a}{m} = 1 - \frac{1}{p\left(\frac{\lg s - \lg (s-k)}{r}\right)}$$

Hiebei darf $\frac{k}{s}$ nicht grösser als $\frac{1}{2}$ werden. Ist $\frac{a}{m}$ bestimmt, so lässt sich dann nach Nr. 16 auch die Zahl der Versuche, welche B zugestanden werden müssen, bestimmen.

§. 4.

n Personen A_1, A_2, A_3 .... A_n unternehmen ein Ereigniss, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ ausgedrückt ist, herbei zu führen. Jedem Theilnehmer ist eine bestimmte Zahl auf einander folgender Versuche zugestanden, wenn er an die Reihe kommt; q dem A_1, r dem A_2, s dem A_3 u. s. f. n dem A_n. In der vorstehenden Reihenfolge kommen sie zum Anstellen der Versuche; jeder tritt p mal ein. Welches ist der Werth der Erwartung eines jeden Theilnehmers?

Die Erwartung von A_1 in der ersten Reihe der Versuche ist nach §. 3

$$W_1 = \frac{m^q - b^q}{m^q}$$

die von A_2 ist $\frac{b^q}{m^q} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r}$

die von A_3 ist $\frac{b^{q+r}}{m^{q+r}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s}$

u. s. w.

die von A_n ist $\frac{b^{q+r+s+\cdots}}{m^{q+r+s+\cdots}} \cdot \frac{m^n - b^n}{m^n}$

Nennen wir nun die Zahl aller in einer jeden Reihenfolge von sämmtlichen Theilnehmern angestellten Versuche $q + r + s + \ldots\ldots + n = k$, so findet man für die Erwartungen der in der zweiten Reihenfolge anzustellenden Versuche

$$W_1 = \frac{b^k}{m^k} \cdot \frac{m^q - b^q}{m^q},\; W_2 = \frac{b^{k+q}}{m^{k+q}} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r},\; W_3 = \frac{b^{k+q+r}}{m^{k+q+r}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s} \ldots,$$

$$\ldots\ldots W_n = \frac{b^{2k-n}}{m^{2k-n}} \cdot \frac{m^n - b^n}{m^n}$$

Diese Schlüsse bleiben unverändert für jede spätere Reihenfolge von

Versuchen. Die Erwartungen, welche für die Theilnehmer aus den in der p^{ten} Reihenfolge anzustellenden Versuchen hervor gehen, sind:

$$W_1 = \frac{b^{(p-1)k}}{m^{(p-1)k}} \cdot \frac{m^q - b^q}{m^q},\ W_2 = \frac{b^{(p-1)k+q}}{m^{(p-1)k+q}} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r},\ W_3 = \frac{b^{(p-1)k+q+r}}{m^{(p-1)k+q+r}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s} \ldots\ldots\ldots\ldots W_n = \frac{b^{pk-n}}{m^{pk-n}} \cdot \frac{m^n - b^n}{m^n}$$

Die Gesammterwartung jedes Theilnehmers besteht in der Vereinigung aller der ihm günstigen Fälle. Ihre Vereinigung ist leicht. Werden sie zusammengezählt, so erhalten wir folgende Gleichungen für die Erwartung der einzelnen Theilnehmer.

$$
\begin{aligned}
20.\quad W_1 &= \frac{m^q - b^q}{m^q} \cdot \frac{m^k}{m^k - b^k} \cdot \frac{m^{pk} - b^{pk}}{m^{pk}} \\
W_2 &= \frac{b^q}{m^q} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r} \cdot \frac{m^k}{m^k - b^k} \cdot \frac{m^{pk} - b^{pk}}{m^{pk}} \\
W_3 &= \frac{b^{q+r}}{m^{q+r}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s} \cdot \frac{m^k}{m^k - b^k} \cdot \frac{m^{pk} - b^{pk}}{m^{pk}} \\
&\vdots \\
W_n &= \frac{b^{k-n}}{m^{k-n}} \cdot \frac{m^n - b^n}{m^n} \cdot \frac{m^k}{m^k - b^k} \cdot \frac{m^{pk} - b^{pk}}{m^{pk}}
\end{aligned}
$$

Wird die Reihenfolge bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird $\frac{m^{pk} - b^{pk}}{m^{pk}} = 1$, weil $p = \infty$ ist, und dann hat man für die Erwartungen der Theilnehmer bei fortlaufendem Cyclus:

$$
\begin{aligned}
21.\quad W_1 &= \frac{m^q - b^q}{m^k - b^k} \cdot m^{k-q} \\
W_2 &= b^q \cdot \frac{m^r - b^r}{m^k - b^k} \cdot m^{k-q-r} \\
W_3 &= b^{q+r} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^k - b^k} \cdot m^{k-q-r-s} \\
&\vdots \\
W_n &= \frac{b^{k-n}\,(m^n - b^n}{m^k - b^k}
\end{aligned}
$$

Das Verhältniss der Erwartungen unter den Theilnehmern der Reihenfolge nach ist

$$22.\quad W_1 : W_2 : W_3 : \ldots\ldots : W_n =$$
$$= \frac{m^q - b^q}{m^q} : \frac{b^q}{m^q} \cdot \frac{m^r - b^r}{m^r} : \frac{b^{q+r}}{m^{q+r}} \cdot \frac{m^s - b^s}{m^s} : \ldots\ldots : \frac{b^{k-n}}{m^{k-n}} \cdot \frac{m^n - b^n}{m^n}$$

Auch hier erkennt man, dass das Verhältniss unter den Erwartungen gleich gleibt, ob wenige oder viele Versuche gemacht werden, wenn nur jeder Theilnehmer gleich oft an die Reihenfolge kommt.

Nun lässt sich auch die Beantwortung folgender Frage geben: Wie viele aufeinander folgende Versuche müssen jedem einzelnen Theilnehmer zugestanden werden, damit die Erwartung vor Eintritt in die Reihenfolge für jeden gleich sey?

Zu bemerken ist, dass die Wahrscheinlichkeit das fragliche Ereigniss herbeizuführen $\frac{a}{m}$ nicht grösser seyn darf, als der Quotient aus der Anzahl der Theilnehmer in die Einheit, also nicht grösser als $\frac{1}{n}$, weil sonst die Beantwortung der Frage unmöglich wird. Denn die Summe der Erwartungen aller Theilnehmer darf nicht grösser als $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ werden, was geschehen würde, wenn $\frac{a}{m} > \frac{1}{n}$ wäre. Ist $\frac{a}{m} = \frac{1}{n}$, so kann jeder Theilnehmer nur einmal in die Reihenfolge eintreten; ist $\frac{a}{m} < \frac{1}{n}$ so kann die Reihenfolge alle oder einige Theilnehmer mehrere mal treffen *).

Geht die Reihenfolge ins Unbestimmte fort, so bestimmt sich

*) Es gibt allerdings auch Fälle, worin die Erwartung des Theilnehmers grösser als $\frac{1}{n}$ werden kann. Sie gehören aber nicht hierher.

aus der ersten Gleichung von Nr. 22 die Zahl der Versuche, welche dem ersten Theilnehmer zugewiesen werden sollen. Es ist

$$23.\quad q = \frac{\lg (m^k - W_1 (m^k - b^k)) - k \lg m}{\lg b - \lg m}$$

Die Grösse k kann nicht willkührlich angenommen werden, sie ist der Anzahl der Versuche gleich, welche in der ersten Reihenfolge angestellt werden sollen. Die ihr entsprechende Grösse der Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Erwartungen für die erste Reihenfolge der Versuche. Hiernach bestimmt sich k, wenn in der Gleichung wenn in Nr. 8 $\frac{r}{s} = n W_1$ gesetzt wird, und es ist

$$24.\quad k = \frac{\lg (1 - n W_1)}{\lg b - \lg m}$$

Ist nun hiernach q und k bestimmt, so lässt sich durch die zweite Gleichung leicht auch r, dann s, u. s. f. bestimmen. Tritt nur eine Reihenfolge ein, so geben die zu Anfang des §. angegebenen Gleichungen die Beantwortung, und man erhält

$$25.\quad q = \frac{\lg (1 - W_1)}{\lg b - \lg m}$$

Hieraus bestimmt sich r, dann s u. s. f. Wird die Rechnung wirklich ausgeführt, so kommen gar zu leicht Bruchtheile vor, welche eine genaue gleichheitliche Bestimmung oft unmöglich machen. Werfen z. B. drei Spieler mit einem Würfel, um die Zahl 6 zu werfen, und wird dem ersten ein Wurf zugestanden, so müssen den beiden andern zusammen drei Würfe zugestanden werden, wobei ein kleiner Vortheil auf ihrer Seite ist. k wäre hier vier. Wollte man aber dennoch die Zahl der Würfe abtheilen, so müsste dem zweiten einer, dem dritten zwei zugestanden werden, wodurch sich das Verhältniss ihrer Erwartungen

$$W_1 : W_2 : W_3 = 216 : 180 : 275$$

also zum Nachtheil des zweiten und Vortheil des dritten gestalten würde. Eine günstigere Anordnung liesse sich nicht wohl geben.

Würde man dem ersten zwei Würfe zuweisen, so müssten dem zweiten vier und dem dritten alle übrigen zugewiesen werden. Das Verhältniss der Erwartungen würde sich so ziemlich dem der Gleichheit nähern. Es wäre

$$W_1 : W_2 : W_3 = 14256 : 16775 : 15625$$

und die Erwartung des ersten wäre $\frac{11}{36}$ oder nahe $\frac{1}{3}$, woraus hervorgeht, dass die Theilnehmer nur einmal zum Spiele gelangen können.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man von gleicher Zahl der Würfe ausgeht. Wird jedem von drei Spielern nur ein Wurf mit einem Würfel zugestanden, um die Zahl 6 zu werfen, so ist das Verhältniss der Erwartungen

$$W_1 : W_2 : W_3 = 36 : 30 : 25$$

Sind es aber vier Spieler, so ist es

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 216 : 180 : 150 : 125$$

Werden jedem zwei Würfe zugestanden, so hat man

$$W_1 : W_2 : W_3 = 14256 : 9900 : 6875$$

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 513216 : 356400 : 247500 : 171875$$

Man erkennt hieraus, dass die Erwartung des ersten Theilnehmers, wenn jedem gleiche Anzahl von Versuchen zugestanden wird, um so grösser wird, je mehr Versuche er nacheinander anstellen darf, und dass sich die Erwartung der spätern Theilnehmer um so mehr verkleinert, je später sie die Reihenfolge trifft. Hiedurch zeigt sich, welch grossen Vortheil unter den genannten Verhältnissen die erste Hand mit sich bringt. Daher wechselt auch gewöhnlich in solchen Spielen die erste Hand und gelangt allmählig zu allen Theilnehmern.

Einfacher werden alle in diesem §. gegebenen Bestimmungen, wenn unter n Theilnehmern jedem nur ein Versuch zugestanden wird.

Dann ist $q = r = s = \dots = n = 1$, $k = n$ und man hat folgende Gleichungen für die Erwartungen der Theilnehmer:

$$26.\quad W_1 = \frac{a}{m} \cdot \frac{m^n}{m^n - b^n} \cdot \frac{m^{pn} - b^{pn}}{m^{pn}}$$

$$W_2 = \frac{ab}{m^2} \cdot \frac{m^n}{m^n - b^n} \cdot \frac{m^{pn} - b^{pn}}{m^{pn}}$$

$$W_3 = \frac{ab^2}{m^3} \cdot \frac{m^n}{m^n - b^n} \cdot \frac{m^{pn} - b^{pn}}{m^{pn}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$W_n = \frac{ab^{n-1}}{m^n} \cdot \frac{m^n}{m^n - b^n} \cdot \frac{m^{pn} - b^{pn}}{m^{pn}}$$

Das Verhältniss der Erwartung löst sich in folgendes auf

$$27.\quad W_1 : W_2 : W_3 : \dots\dots : W_n = 1 : \frac{b}{m} : \frac{b^2}{m^2} : \frac{b^3}{m^3} : \dots\dots : \frac{b^{n-1}}{m^{n-1}}$$

§. 5.

Wir haben in den vorhergehenden §§. die Wahrscheinlichkeit, womit jeder Theilnehmer das gewünschte Ereigniss herbeizuführen sucht, gleich gesetzt. Diese Beschränkung ist nicht nothwendig, noch tritt sie überall ein, z. B. bei solchen Unternehmungen, wo Geschicklichkeit, Kenntnisse u. s. w. mitwirken. Wir betrachten daher noch folgende allgemeine Aufgabe, um sie zu beantworten.

n Personen, A_1, A_2, A_3 .... A_n bemühen sich in der genannten Reihenfolge und jeder mit einer besondern Wahrscheinlichkeit, ein Ereigniss herbei zu führen und zwar

A_1 mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens im einzelnen Falle $\frac{a}{m}$, des Misslingens $\frac{\alpha}{m}$ in q aufeinander folgenden Versuchen.

A_2 mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens im einzelnen Falle $\frac{b}{k}$, des Misslingens $\frac{\beta}{k}$ in r Versuchen.

A_3 mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens $\frac{c}{g}$, des Misslingens $\frac{\gamma}{g}$ in s Versuchen u. s. w.

.
.
.

A_n mit einer Wahrscheinlichkeit des Gelingens $\frac{u}{z}$, des Misslingens $\frac{v}{z}$ in n aufeinander folgenden Versuchen.

Jeder Theilnehmer tritt p mal in die Reihe ein. Welches sind die Grade der Erwartungen für die einzelnen Theilnehmer?

Nach der bisher angegebenen Methode sind die Erwartungen der einzelnen Theilnehmer in der ersten Reihenfolge:

$$W_1 = \frac{m^q - \alpha^q}{m^q}$$

$$W_2 = \frac{\alpha^q}{m^q} \cdot \frac{k^r - \beta^r}{k^r}$$

$$W_3 = \frac{\alpha^q}{m^q} \cdot \frac{\beta^r}{k^r} \cdot \frac{g^s - \gamma^s}{g^s}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$W_n = \frac{\alpha^q . \beta^r . \gamma \ldots\ldots}{m^q . k^r . g^s \ldots\ldots} \cdot \frac{z^n - v^n}{z^n}$$

Die aus der zweiten Reihenfolge hervorgehenden sind:

$$W_1 = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \;\ldots\; \upsilon^n}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \;\ldots\; z^n} \cdot \frac{m^q - \alpha^q}{m^q}$$

$$W_2 = \frac{\alpha^{2q} \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \;\ldots\; \upsilon^n}{m^{2q} \cdot k^r \cdot g^s \;\ldots\; z^n} \cdot \frac{k^r - \beta^r}{k^r}$$

$$W_3 = \frac{\alpha^{2q} \cdot \beta^{2r} \cdot \gamma^s \;\ldots\; \upsilon^n}{m^{2q} \cdot k^{2r} \cdot g^s \;\ldots\; z^n} \cdot \frac{g^s - \gamma^s}{g^s}$$

$$\vdots$$

$$W_n = \frac{\alpha^{2q} \cdot \beta^{2r} \cdot \gamma^{2s} \;\ldots\; \upsilon^n}{m^{2q} \cdot k^{2r} \cdot g^{2s} \;\ldots\; z^n} \cdot \frac{z^n - \upsilon^n}{z^n}$$

u. s. w. Die aus den p Reihenfolgen hervorgehenden Erwartungen sind

28. $$W_1 = \frac{m^q - \alpha^q}{m^q} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n} \cdot \frac{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n)^p}{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p}$$

$$W_2 = \frac{\alpha^q}{m^q} \cdot \frac{k^r - \beta^r}{k^r} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n} \cdot \frac{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n)^p}{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p}$$

$$W_3 = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r}{m^q \cdot k^r} \cdot \frac{g^s - \gamma^s}{g^s} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n} \cdot \frac{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n)^p}{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p}$$

$$\vdots$$

$$W_n = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots} \cdot \frac{z^n - \upsilon^n}{z^n} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n} \cdot \frac{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots \upsilon^n)^p}{(m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n)^p}$$

Wird die Reihenfolge, in welcher die Theilnehmer eintreten, bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird p unendlich gross, und dann fliessen hieraus folgende Gleichungen:

$$29.\quad W_1 = \frac{m^q - \alpha^q}{m^q} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots v^n}$$

$$W_2 = \frac{\alpha^q}{m^q} \cdot \frac{k^r - \beta^r}{k^r} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots v^n}$$

$$W_3 = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r}{m^q \cdot k^r} \cdot \frac{g^s - \gamma^s}{g^s} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots v^n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$W_n = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots} \cdot \frac{z^n - v^n}{z^n} \cdot \frac{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n}{m^q \cdot k^r \cdot g^s \ldots z^n - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots v^n}$$

das Verhältniss der Erwartungen unter den Theilnehmern ist

$$30.\quad W_1 : W_2 : W_3 : \ldots\ldots\ldots : W_n =$$

$$= \frac{m^q - \alpha^q}{m^q} : \frac{\alpha^q}{m^q} \cdot \frac{k^r - \beta^r}{k^r} : \frac{\alpha^q \cdot \beta^r}{m^q \cdot k^r} \cdot \frac{g^s - \gamma^s}{g^s} : \ldots\ldots\ldots$$

Auch unter vorstehenden Bedingungen hängt das Verhältniss nicht von der Zahl der Reihenfolgen ab, und es ist gleichgültig, ob ein Theilnehmer ein oder mehrere mal zum Eintritt gelangt.

Geht man zu speciellen Fällen über, worin die Wahrscheinlichkeiten veränderlich sind, und nimmt an, dass A und B mit zwei Würfeln werfen, so, dass A gewinnt wenn er die Summe 4; B wenn er 5 wirft, dass jeder Spieler einmal wirft, und dass das Spiel so lange dauert, bis eine der genannten Zahlen geworfen wird, so hat man zu berücksichtigen, dass die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln in einem Wurfe die Summe 4 zu werfen $\frac{a}{m} = \frac{3}{36}$ also $\frac{\alpha}{m} = \frac{33}{36}$; die mit zwei Würfeln die Summe 5 zu werfen $\frac{b}{k} = \frac{4}{36}$ also $\frac{\beta}{k} = \frac{32}{36}$, und $q = 1$ und $r = 1$ ist; und man erhält dann als Ver-

hältniss für die Erwartung von A und B $W_1 : W_2 = 9 : 11$. Würde unter den eben angegebenen Bedingungen jeder Spieler zweimal werfen, so wäre das Verhältniss ihrer Erwartungen wie 1863 : 2057.

§. 6.

Die Gleichungen des vorhergehenden §. sind unter der vorstehenden Form mitgetheilt worden, weil sie unter ihr zur Berechnung am geeignetsten erscheinen. Eine kurze Bezeichnung wählen wir nun für sie, und zwar deswegen weil diese tauglicher zur Beantwortung anderer Fragen wird.

Wir bezeichnen demnach die Wahrscheinlichkeiten, womit die Theilnehmer in einzelnen Fällen das gewünschte Ereigniss herbeiführen, $\frac{a}{m}, \frac{b}{k}, \frac{c}{g} \ldots\ldots \frac{u}{z}$ der Reihe nach durch a, b, c, ... u, und die Wahrscheinlichkeiten des Gegentheils. $\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{g} \ldots\ldots \frac{v}{z}$ der Reihe nach durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots. v$, so dass immer $a = 1 - \alpha$, $b = 1 - \beta$, $c = 1 - \gamma$ u. s. w., eben so $\alpha = 1 - a$; $\beta = 1 - b$, ... ist. Die Gleichungen 28 gehen in folgende über:

$$31. \quad W_1 = (1 - \alpha^q) \frac{1 - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n)^p}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n}$$

$$W_2 = \alpha^q (1 - \beta^r) \frac{1 - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n)^p}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n}$$

$$W_3 = \alpha^q \cdot \beta^r (1 - \gamma^s) \frac{1 - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n)^p}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n}$$

$$\vdots$$

$$W_n = \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots (1 - v^n) \frac{1 - (\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n)^p}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots v^n}$$

Werden die Reihenfolgen unbestimmt fortgesetzt, und berücksichtigt, dass $(\alpha^q . \beta^r . \gamma^s \ldots. v^n)^p = 0$ wird bei unendlich grossem p.

32. $$W_1 = \frac{1 - \alpha^q}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \cdot \ldots \cdot \upsilon^n}$$

$$W_2 = \frac{\alpha^q (1 - \beta^r)}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \cdot \ldots \cdot \upsilon^n}$$

$$W_3 = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r (1 - \gamma^s)}{1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \cdot \ldots \cdot \upsilon^n}$$

$$\vdots$$

$$W_n = \frac{\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \cdot \ldots \cdot \upsilon^n (1 - \upsilon^n)}{\upsilon^n (1 - \alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \cdot \ldots \cdot \upsilon^n)}$$

und das Verhältniss der Erwartungen für die Theilnehmer wird:

33. $$W_1 : W_2 : W_3 : \ldots\ldots\ldots : W_n =$$

$$= 1 - \alpha^q : \alpha^q (1 - \beta^r) : \alpha^q \cdot \beta^r (1 - \gamma^s) \ldots\ldots \frac{\alpha^q \cdot \beta^r \cdot \gamma^s \ldots\ldots \upsilon^n (1 - \upsilon^n)}{\upsilon^n}$$

Die hier mitgetheilten Gleichungen werden dazu dienen, um über die Beziehungen, in welchen Wahrscheinlichkeiten und Anzahlen der Versuche zu einander stehen, zu urtheilen. Diess führt zu der Beantwortung folgender Frage:

Es bemühen sich n Personen, jede mit einer besondern Wahrscheinlichkeit, irgend ein Ereigniss herbei zuführen. Dem ersten ist eine bestimmte Anzahl Versuche zugewiesen. Welche Anzahl von Versuchen muss jedem folgenden Theilnehmer zugewiesen werden, um gleiche Erwartung aufs Gelingen mit ihm zu theilen?

Aus 31 ergeben sich folgende Gleichungen:

$$1 - \alpha^q = \alpha^q (1 - \beta^r) = \alpha^q . \beta^r (1 - \gamma^s) = \alpha^q . \beta^r . \gamma^s (1 - \delta^t) = \ldots\ldots$$

Aus der Vereinigung der zwei ersten Ausdrücke bestimmt sich die Zahl der Versuche, welche dem zweiten Theilnehmer zugewiesen werden muss.

36. $$r = \frac{\lg (2\alpha^q - 1) - q \lg \alpha}{\lg \beta}$$

Ist r bekannt, so lässt sich aus ihm und q durch die Verbindung des zweiten und dritten Ausdruckes die Zahl der Versuche, welche dem dritten Theilnehmer zugewiesen werden muss, bestimmen. Sie ist

37. $$s = \frac{\lg (\alpha^q . \beta^r + \alpha^q - 1) - \lg \alpha^q . \beta^r}{\lg \gamma}$$

Eben so ist die dem vierten zuzuweisende Zahl der Versuche

$$t = \frac{\lg (\alpha^q . \beta^r . \gamma^s + \alpha^q - 1) - \lg \alpha^q . \beta^r . \gamma^s}{\lg \delta}$$

u. s. w. Das Gesetz, welches der Auflösung dieser Gleichungen zu Grunde liegt, ist allgemein und leicht zu erkennen. Die Methode der Auflösung ist zurücklaufend, denn man muss die sämmtlichen früheren kennen, um die Zahl der Versuche eines Theilnehmers bestimmen zu können. Hiernach lassen sich nun leicht Anwendungen machen. Es werfen z. B. A und B mit zwei Würfeln und A gewinnt wenn die Summe 5, B wenn die Summe 4 fällt. Sind nun dem A zwei Würfe zugestanden, so müssen dem B 4 zugestanden werden, damit er gleiche Erwartung habe, wobei jedoch ein kleiner Vortheil auf der Seite von B ist.

Nun wenden wir uns zur Beantwortung folgender Frage:

Es bemühen sich n Personen, jede mit einer besonderen Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle, ein Ereigniss herbeizuführen. Jedem Theilnehmer ist eine besondere Zahl von Versuchen, die er anstellen darf, zugewiesen. Wie muss die jedem zuzuweisende Wahrscheinlichkeit beschaffen seyn, damit er gleiche Erwartung mit allen Theilnehmern theile.

Auch hier gibt die Verbindung der Gleichungen 31 die Mittel zur Auflösung an die Hand. Aus ihnen ist

$1 - \alpha = \alpha^q (1 - \beta^r) = \alpha^q . \beta^r (1 - \gamma^s) = \alpha^q . \beta^r . \gamma^s (1 - \delta^t) = \ldots$

Wir nehmen die Wahrscheinlichkeit des ersten Theilnehmers a als bekannt an.

Sollte sie nicht bekannt seyn, so lässt sie sich aus der allen gemeinschaftlichen Erwartung W_1 mittelst der Zahl der Versuche aus den früher angegebenen hiehergehörigen Gleichungen finden. Aus der schicklichen Verbindung der vorstehenden Gleichungen erhalten wir für die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Eintreffen des Gegentheils zugehören:

$$38. \quad \beta = \sqrt[r]{\frac{2\alpha^q - 1}{\alpha^q}}$$

$$\gamma = \sqrt[s]{\frac{\alpha^q . \beta^r + \alpha^q - 1}{\alpha^q . \beta^r}} = \sqrt[s]{\frac{3\alpha^q - 2}{2\alpha^q - 1}}$$

$$\delta = \sqrt[t]{\frac{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s + \alpha^q - 1}{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s}} = \sqrt[t]{\frac{4\alpha^q - 3}{3\alpha^q - 2}}$$

u. s. w.

$$v = \sqrt[n]{\frac{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s \ldots\ldots v^n + \alpha^q . v^n - v^n}{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s \ldots\ldots v^n}} = \sqrt[n]{\frac{n\alpha^q - n + 1}{(n-1)\alpha^q - n + 2}}$$

wovon die einen Ausdrücke die abhängige, die andern die unabhängige Ableitungsweise angeben. Aus ihnen gibt sich der Werth der günstigen Wahrscheinlichkeiten leicht durch folgende allgemeine Bestimmung:

$$39. \quad u = 1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s \ldots v^n + \alpha^q . v^n - v^n}{\alpha^q . \beta^r . \gamma^s \ldots v^n}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{n\alpha^q - n + 1}{(n-1)\alpha^q - n + 2}}$$

Wenden wir die vorstehenden Gleichungen auf den Fall an, wenn jedem von n Theilnehmern nur ein Versuch gestattet wird und jeder gleiche Erwartung haben soll, so sey hiernach die Erwartung jedes

Theilnehmers $\frac{1}{n}$, und folglich die Wahrscheinlichkeit des ersten Theilnehmers bei dem Zutritt zum Versuche auch $\frac{1}{n}$. Fragt man nun: Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Theilnehmer bei dem Zutritte zum Versuche beschaffen seyn, so erhält man der Reihe nach für die Theilnehmer

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4 \; \ldots\ldots\ldots \; A_{n-2}, \; A_{n-1}, \; A_n$$

die günstigen Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3} \; \ldots\ldots\ldots \; \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1$$

Die Wahrscheinlichkeiten, die für das Eintreffen im einzelnen Falle sprechen, sind, wie man hieraus erkennt, die Glieder der harmonischen Reihe. Die Wahrscheinlichkeiten wachsen für die spätern Theilnehmer, wenn sie zum Versuche kommen, wie das natürlich ist, und die des letzten ist 1, oder seine Erwartung steigert sich bis zur Gewissheit — d. h. er wird unter den vorliegenden Bedingungen seinen Wunsch erreichen, wenn keiner seiner Vorgänger ihn erreicht hat.

Das Gesagte lässt leicht aus dem Allgemeinen ins Besondere sich übertragen, woraus es deutlich wird. Es fällt mit folgendem Falle zusammen:

In einer verdeckten Urne sind (n — 1) schwarze und 1 weisse (zusammen n) Kugeln enthalten. n Personen versuchen, die weisse Kugel herauszuziehen. Jeder darf nur einmal ziehen. Die herausgezogene Kugel wird nicht zurückgeworfen. Wie wird die Erwartung und wie die Wahrscheinlichkeit eines jeden Theilnehmers bei dem Eintritt zum Versuche beschaffen seyn?

Es ist klar, dass Erwartung und Wahrscheinlichkeit des ersten Theilnehmers $\frac{1}{n}$ ist. Ist eine Kugel gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für den zweiten $\frac{1}{n-1}$, seine Erwartung aber $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$. Sind zwei Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für den dritten bei dem Zuge $\frac{1}{n-2}$, die Erwartung aber vor Beginn der Ziehungen $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ u. s. f. Woraus sich zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten bei dem Zutritt zum Versuche verschieden nach den Gliedern der harmonischen Reihe, während die Erwartungen Aller vor dem Beginne gleich sind. Aus dem Gesagten rechtfertigt sich die Behauptung;

40. Bemühen sich mehrere Personen, ein Ereigniss in abwechselnder Reihenfolge und bei nur einmaligem Zutritte zum Versuche herbeizuführen, und stehen die den Theilnehmern günstigen Wahrscheinlichkeiten untereinander im Verhältniss wie die Glieder der harmonischen Reihe, deren erstes Glied die Zahl der Personen zum Quotienten hat; so ist die Erwartung aller Theilnehmer vor dem Anfange der Versuche gleich.

Zugleich folgt hieraus, dass es unter den genannten Bedingungen gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Theilnehmer ihre Versuche anstellen. Hierin ist auch der Grund zu suchen, dass man bei dem Ausspielen der Gewinnste bei Lotterieen die Ordnung, in welcher die Nummern ausgezogen werden, gar nicht berücksichtigt; dass bei der Vertheilung bestimmter Vortheile oder Lasten wie z. B. bei Aushebung der Conscribirten zum Militärdienste, wobei das Loos

entscheidet, die Reihe, in welcher die Betheiligten zum Loosen eintreten, ganz gleichgültig ist.

Andere Folgerungen werden sich ziehen lassen, wenn die Allen gemeinschaftliche Erwartung einen kleineren Werth hat, als der Quotient ist, welcher durch die Einheit und die Zahl der Theilnehmer gebildet wird *).

*) Ueber den hier behandelten Gegenstand ist mir keine Literatur, die ich hätte benntzen können, bekannt.

